MAI 2 - domácí úkol 2
(základní pojmy u funkcí více proměnných)

Pokuste se příklady a problémky vyřešit, nebo aspoň formulujte otázky k řešení daných úloh, proč vám to „nejde“ vyřešit. I to se bude „počítat“.

1. Pokuste se rozhodnout, zda následující funkce jsou spojité v R^2:
   a) $f(x,y) = (x+y)^2.\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$;
   b) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

2. „Mechanické“ derivování (i když jsme na cvičení nestihli parciální derivace počítat, zkuste to sami, na cvičení budeme pokračovat):
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:
   a) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;   b) $f(x,y) = e^{x^2 - y}$;
   c) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$;   d) $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2})$.

   Zjistěte, kde jsou dané funkce diferencovatelné a určete v těchto bodech jejich diferenciál.

3. A vyřešte nebo zkuste zjistit, co „nevíte“ „
   Základní „slovíčka“:
   Je dána funkce $f(x,y) = \log\left(\sqrt{y+1} - x\right)$.
   a) Najděte definiční obor D funkce f a nakreslete jej.
   b) Vypočítejte gradient $\nabla f(0,0)$.
   c) Ukažte, že funkce f má v bodě $[0,0]$ totální diferenciál a určete jej. Napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,0,0]$.
   d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace f(- 0,04; 0,02).

4. Ukažte, že pro „malá“ x, y platí : $arctg\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \cong x + y$.

A můžete zkusit promyslet i příklad, který jsme začali řešit na cvičení:

5. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.